Zastosowania całkowania 3

1 Pirotechniczne koło ognia ma swój początkowy moment bezwładności I, który zmniejsza się w stałym tempie k podczas spalania. Jeśli moment siły G działający na koło ognia jest stały, wyznacz:

(a) prędkość kątową $\omega(t)$ jako funkcję G, I, k oraz czasu t,

(b) przyspieszenie kątowe $\omega'(t)$.

Odpowiedź **Rozwiązanie**

2 Walec ma masę M, wysokość L i promień R. Znajdź stosunek L do R, jeśli moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek i prostopadłej do osi walca jest minimalny.

Odpowiedź **Rozwiązanie**

Odpowiedzi

1 (a) $\omega(t) = \dfrac{Gt}{I - kt}$

(b) $\omega'(t) = \dfrac{GI}{(I - kt)^2}$

Pytanie **Rozwiązanie**

2 $\sqrt{3} : \sqrt{2}$

Pytanie **Rozwiązanie**

Rozwiązania

1 (a) Moment siły definiuje się jako tempo zmiany momentu pędu

$G = \dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$, gdzie dla obracającego się pirotechnicznego koła ognia $L = I\omega$.

Zatem

$$G = \frac{\mathrm{d}\big(I(t)\omega(t)\big)}{\mathrm{d}t}.$$

Teraz $I(t) = I - kt$, a więc całkując, otrzymujemy

$Gt = (I - kt)\omega(t)$, co daje $\omega(t) = \dfrac{Gt}{I - kt}$.

(b) Z części (a) wiemy, że $\omega(t) = \dfrac{Gt}{I - kt}$. Różniczkując względem czasu t, otrzymujemy

$$\omega'(t) = \frac{G(I - kt) - Gt(-k)}{(I - kt)^2} = \frac{GI}{(I - kt)^2}.$$

Pytanie **Odpowiedź**

2 Moment bezwładności walca o promieniu R i wysokości L względem osi przechodzącej przez środek i prostopadłej do osi walca można wyznaczyć, korzystając z twierdzenia Steinera:

$$I = \frac{MR^2}{4} + \frac{ML^2}{12}.$$

Masa walca jest stała i wynosi $M = \rho\pi R^2 L$. Z tej równości możemy wyznaczyć L:

$$L = \frac{M}{\rho\pi R^2}.$$

Zatem

$$I = \frac{MR^2}{4} + \frac{M^3}{12\rho^2\pi^2R^4}.$$

Stąd:

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}R} = \frac{2MR}{4} - \frac{4M^3}{12\rho^2\pi^2R^5} = \frac{MR}{2} - \frac{M^3}{3\rho^2\pi^2R^5} = \frac{MR}{2} - \frac{ML^2}{3R}$$

oraz $\dfrac{\mathrm{d}^2I}{\mathrm{d}R^2} = \dfrac{M}{2} + \dfrac{5M^3}{3\rho^2\pi^2R^6} > 0$

dla wszystkich wartości R.

Teraz $\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}R} = \dfrac{MR}{2} - \dfrac{ML^2}{3R} = 0$, gdy $\dfrac{R^2}{2} = \dfrac{L^2}{3}$, czyli gdy $\dfrac{R}{L} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Tak więc dla punktu stacjonarnego promień walca i jego wysokość pozostają w powyższym stosunku. Ponieważ druga pochodna jest dodatnia, to w punkcie stacjonarnym moment bezwładności jest minimalny.

Pytanie **Odpowiedź**
